

I 部 リスクの復習とその拡張

我々日本人にとって、老後の生活資金を確保すべく、金融商品に投資をしていくことの重要性が今後ますます大きくなっていくことは間違いない。そのためには、自分の頭でしっかりと今後の経済動向を見極め、間違った投資行動をとらないような確固とした「知恵」が必要である。

第I部では、**リスク**がどのように定義され、どのように投資をすれば**リスクを無駄にとる必要がないのか**をしっかりと理解することで、受講者がどのように金融資産を分散投資していけば良いのかについての指針を与えることを目標とする。

Lecture Note 1 (「危険回避の方法としての国際分散投資」その1)

1. サント・ペテルスブルクのパラドックス

ベルヌーイは、「人々が()を持つこと」を証明した。その興味深い内容を見ていこう。

【ベルヌーイの考えた賭け】

- コイン投げゲーム。
- ゲームのプレイヤーは「投げ手」と「参加者」の2人。
- 参加者はゲームへの「参加料」を支払う。
- 投げ手はコイン投げの結果に応じ、参加者に対して賞金を支払う。
- 投げ手が n 回目にはじめて表が出たとき、そこでゲームは終了し、投げ手は参加者に賞金()ドルを支払う($n = 1, 2, \dots$)。

1回目	2回目	3回目	4回目	5回目	6回目	7回目	8回目	9回目	10回目	賞金
○										1
●	○									2
●	●	○								4
●	●	●	○							8
●	●	●	●	○						16
●	●	●	●	●	○					32
●	●	●	●	●	●	○				64
●	●	●	●	●	●	●	○			128
●	●	●	●	●	●	●	●	○		256
●	●	●	●	●	●	●	●	●	○	512

(○ は表, ● は裏を表す)

賭けに参加することによって受け取ることが期待できる賞金はいくらか？

このような賞金の金額のことを()といい、次のようにして求める。

【 賞金の期待値 】

- 賞金は $x_1, x_2, \dots, x_N$ のいずれかの値をとる .
- 賞金が $x_1, x_2, \dots, x_N$ をとる確率は , それぞれ $p_1, p_2, \dots, p_N$ である .
ただし , $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_N \geq 0$.
- 賞金を X とし , 賞金の期待値を $E(X)$ と記すと , それは次式で表される .
 $E(X) = (\quad \quad \quad)$

例 : 次の宝くじの賞金の期待値はいくらか ?

確率 $1/100$ で 100 ドルが当たる宝くじ

a. 当たったときの賞金を x_1 ドル , 当たらなかったときの賞金を x_2 ドルとすると ,

$$x_1 = (\quad \quad \quad) , x_2 = (\quad \quad \quad)$$

b. 当たる確率を p_1 , 当たらない確率を p_2 とすると ,

$$p_1 = (\quad \quad \quad) , p_2 = (\quad \quad \quad)$$

c. 賞金の期待値は ,

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ &= (\quad \quad \quad) \\ &= (\quad \quad \quad) (\text{ドル}) \end{aligned}$$

賞金の期待値が大きいほど , 高額な賞金が期待できる魅力的な賭けになる . ただし , のように , 実際に得られる賞金が期待値と絶対に同じにならない場合もある .

a.1 回目にはじめて表が出たときの賞金を x_1 ドル，
2 回目にはじめて表が出たときの賞金を x_2 ドル，
…， n 回目にはじめて表が出たときの賞金を x_n ドル，… とすると，

b.1 回目にはじめて表が出る確率を p_1 ,
2 回目にはじめて表が出る確率を p_2 ,
... , n 回目にはじめて表が出る確率を p_n , ... とすると ,

- 1.** $a^0 = 1$
- 2.** $\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}$

[illegible]

ここで、「 ∞ 」は「無限大」と読み、() 数を表す.

4

参加料が 100 億ドルのとき、あなたは賭けに参加しますか？ (Yes / No)
恐らく、誰もが () と答えるだろう。

ベルヌーイの賭けは賞金の期待値が無限大なので、参加料がいくらでも誰もが賭けに参加するはずである。しかし ()。
この逆説を () という。

なぜ誰もが () と答えるのか？

a. 1 回目に表が出てしまうと、99 億 9999 万 9999 ドルの損になる。
これが起こる確率は () もある。

b. もとをとるには、少なくとも () 回目まで連続して裏が出なければならない。
これが起こる確率は 0.00000000006 しかない。

c. 34 回目まで裏で 35 回目にはじめて表が出れば、71 億 7986 万 9184 ドルの得になるが、
33 回目まで裏で 34 回目にはじめて表が出れば、14 億 1006 万 5408 ドルの損になる。

d. いま仮に、() とすると、その人は参加料が
いくらでも賭けに参加して、参加料を上回る賞金をねらうだろう。

e. しかし、そのような人はいない。

f. では、なぜ、多額の参加料を支払ってこの賭けに参加をしないのか？
解答 ()

g. つまり 人々は損をするリスクを恐れ、それを避けようとする ()
を持つといわざるを得ない。それゆえ、誰も賭けに参加しないのである。

以上がベルヌーイの証明の内容である。ベルヌーイは、巧妙な「思考実験」によって、見事に「人々が危険回避的な性向を持つこと」を証明したのである。

人々が危険回避的な性向を持つ以上、() は、社会にとって、
プラスである。

では、()とはいったい何なのか？

2 . 危険回避と国際資本取引

国際的な分散投資は、リスクを軽減する経済行為であり、()になる。つまり、投資をする場合は()。詳しくは後で説明します。

ドリル1

- (1) 確率 $1/6$ で 1200 円、確率 $2/6$ で 600 円が得られる宝くじの賞金の期待値はいくらか。
- (2) サンクト・ペテルスブルクのパラドックスとは、どのような逆説か。
- (3) サンクト・ペテルスブルクのパラドックスにより、人々がどのような性向を持つことが証明されたか。

Lecture Note 2 (「危険回避の方法としての国際分散投資」その2)

1. 収益の標準偏差 (ヴォラティリティ)

例を使って、分散投資が () であることを確かめよう。

【 株式投資の例 】

- 1000 万円を持った「投資家」.
- 1000 万円を全部使って「株式」を購入.
- 株式の銘柄はたくさんあるが、全銘柄が 1 株あたり 1000 円で取引されている.
- どの銘柄についても、企業の業績がよいときの配当は 1 株あたり 100 円、
企業の業績が悪いときの配当はゼロ.
- また、企業の業績がよい確率は $1/2$ 、悪い確率も $1/2$.

まず、ベンチマークとして、分散投資をしないケースから考えよう。

投資家が A 社の株式だけを購入したとき、配当の期待値はいくらか。

a. 投資家が購入した A 社の株式の数は () 株である。

()

b. A 社の業績がよいときに投資家が受け取る配当を x_1 , A 社の業績が悪いときに投資家が受け取る配当を x_2 とすると、

$$x_1 = () = () (\text{円})$$

$$x_2 = () = () (\text{円})$$

c. A 社の業績がよい確率を p_1 , A 社の業績が悪い確率を p_2 とすると、

$$p_1 = () , p_2 = ()$$

d. 配当の期待値は,

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2$$

$$= (\quad) = (\quad) (\text{円})$$

配当の期待値は 50 万円であるが, 実際に受け取る配当は, 配当の期待値から, (
)
に注意しよう.

このズレの大きさを表す指標として配当の標準偏差があり, 次のようにして求める.

【 配当の標準偏差 】

□ 配当は $x_1, x_2, \dots, x_N$ のいずれかの値をとる.

□ 配当が $x_1, x_2, \dots, x_N$ をとる確率は, それぞれ $p_1, p_2, \dots, p_N$ である.

ただし, $p_1 + p_2 + \dots + p_N = 1, p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_N \geq 0$.

□ 配当を X とし, 配当の期待値を $E(X)$ と記すと, それは次式で表される.

$$E(X) = (\quad)$$

□ 配当の分散を $V(X)$ と記すと, それは次式で表される.

$$V(X) = (\quad)$$

□ 配当の標準偏差を $D(X)$ と記すと, それは次式で表される.

$$D(X) = (\quad)$$

配当の標準偏差が大きい値をとるということは (
) を意味する.

したがって, 配当の標準偏差が大きい株式投資は, 配当が期待値を大きく上回る望ましい
 事態が起こる一方で, (
) がともなう.

配当の標準偏差を計算してみよう.

投資家が A 社の株式だけを購入したとき, 配当の標準偏差はいくらか.

e. 配当の分散は,

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 \\ &= (\quad) \\ &= (\quad)(\text{円}^2) \end{aligned}$$

f. 配当の標準偏差は,

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= (\quad) = (\quad) (\text{円})$$

3. $\sqrt{a^2} = a$ ($a \geq 0$)

4. $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ ($a \geq 0, b \geq 0$)

ちなみに，ベルヌーイの賭けの賞金の標準偏差は（ ）であり，非常に危険な賭けであることがわかる．

g. ベルヌーイの賭けの分散

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2 + \cdots$$

手持ちの現金は、変動性が全くないので（物価が安定しているならば）、標準偏差は（ ）である。こうした変動の無い資産のことを（ ）資産という。

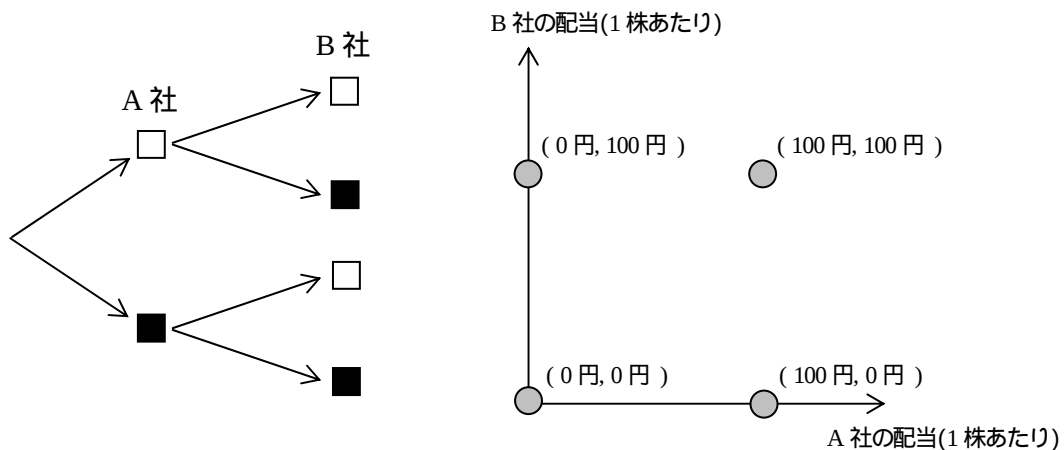
一方，株式などのように変動のある資産にことを（ ）資産という。

2. 収益の相関

今度は、分散投資を考えよう。

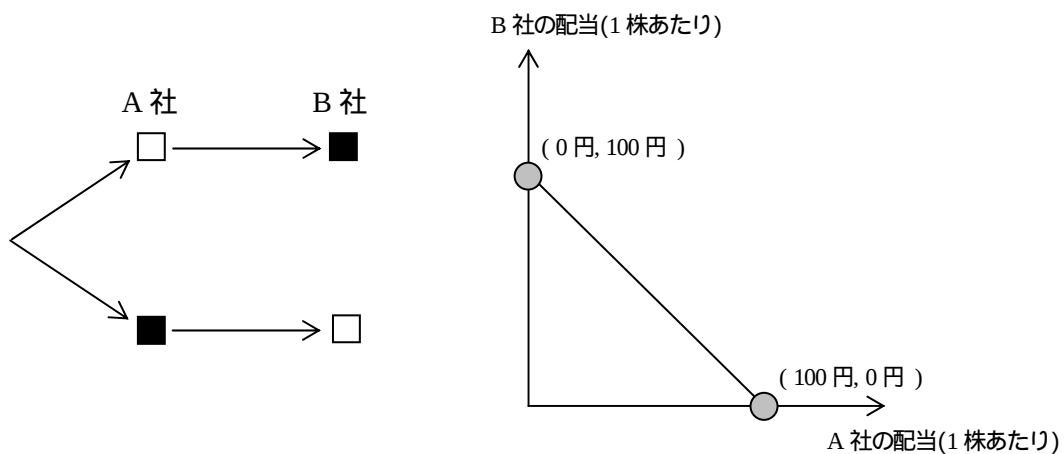
分散投資とは、()をいう。分散投資をする場合は、異なる株式の配当の間に()があるかどうかには注意しなければならない。

a. A 社の業績のよし悪しと B 社の業績のよし悪しが独立しているとしよう。



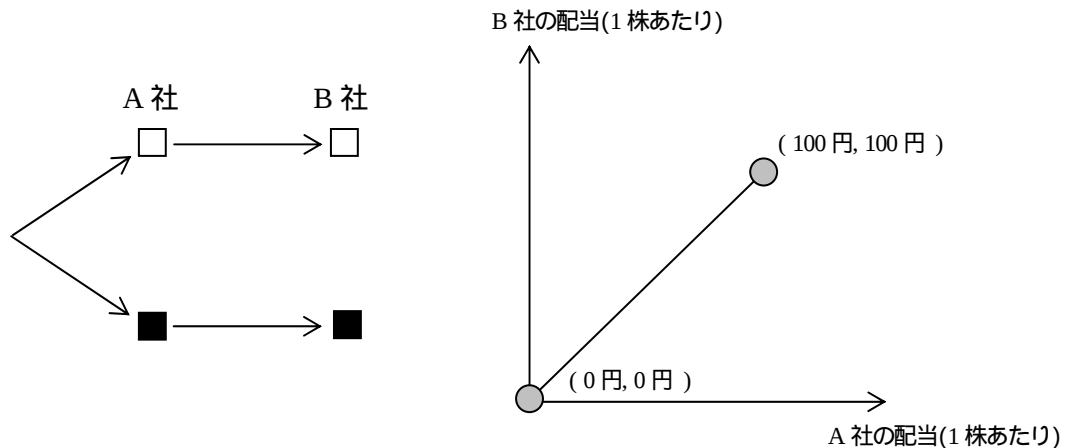
このとき、A 社の配当が高いか低いかは、B 社の配当が高いか低いかと無関係である。このことを()という。

b. A 社の業績がよいとき、必ず B 社の業績が悪く、A 社の業績が悪いとき、必ず B 社の業績がよいとしよう。



このとき、A 社の配当が高ければ必ず B 社の配当が低く、A 社の配当が低ければ必ず B 社の配当が高い。このことを()という。

c. A 社の業績がよいとき , 必ず B 社の業績がよく , A 社の業績が悪いとき , 必ず B 社の業績が悪いとしよう .



このとき , A 社の配当が高ければ必ず B 社の配当も高く , A 社の配当が低ければ必ず B 社の配当も低い . このことを()という .

3 . 分散投資 — 配当に相関がないとき —

配当に相関がないときの分散投資から考えよう .

投資家が A 社と B 社の株式を同じ額ずつ (500 万円ずつ) 購入したとき , 配当の標準偏差はいくらか . ただし , A 社のよし悪しと B 社の業績のよし悪しは , 独立しているとする . したがって , A 社の配当と B 社の配当に () .

a. 投資家が購入した A 社の株式の数は () 株である .

()

同じ額ずつ購入するので , 投資家が購入した B 社の株式の数も () 株である .

b. A 社の業績がよく , B 社の業績もよいときに , 投資家が受け取る配当を x_1 ,
 A 社の業績がよく , B 社の業績が悪いときに , 投資家が受け取る配当を x_2 ,
 A 社の業績が悪く , B 社の業績がよいときに , 投資家が受け取る配当を x_3 ,

A 社の業績が悪く，B 社の業績も悪いときに，投資家が受け取る配当を x_4 とすると，

$$x_1 = (\quad) = (\quad)(\text{円})$$

$$x_2 = (\quad) = (\quad)(\text{円})$$

$$x_3 = (\quad) = (\quad)(\text{円})$$

$$x_4 = (\quad) = (\quad)(\text{円})$$

c. A 社の業績がよく，B 社の業績もよい確率を p_1 ，

A 社の業績がよく，B 社の業績が悪い確率を p_2 ，

A 社の業績が悪く，B 社の業績がよい確率を p_3 ，

A 社の業績が悪く，B 社の業績も悪い確率を p_4 とすると，

$$p_1 = \text{A 社の業績がよい確率} \times \text{B 社の業績がよい確率}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\quad) = (\quad)$$

$$p_2 = \text{A 社の業績がよい確率} \times \text{B 社の業績が悪い確率}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\quad) = (\quad)$$

$$p_3 = \text{A 社の業績が悪い確率} \times \text{B 社の業績がよい確率}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\quad) = (\quad)$$

$$p_4 = \text{A 社の業績が悪い確率} \times \text{B 社の業績が悪い確率}$$

$$= \frac{1}{2} \times (\quad) = (\quad)$$

d. 配当の期待値は，

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$$

$$= (\quad)$$

$$= (\quad)(\text{円})$$

e. 配当の分散は，

$$V(X) = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + p_3(x_3 - E(X))^2 + p_4(x_4 - E(X))^2$$

$$= (\quad \quad \quad)$$

$$= (\quad \quad \quad)$$

$$= (\quad \quad \quad)(\text{円}^2)$$

f. 配当の標準偏差は,

$$5. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

$$D(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$= (\quad \quad \quad) = (\quad \quad \quad)$$

$$= (\quad \quad \quad) = (\quad \quad \quad) = (\quad \quad \quad)$$

$$= (\quad \quad \quad) \approx 353553 (\text{円})$$

A 社の株式だけを購入したときの配当の標準偏差 = 50 万円 .

A 社と B 社の株式を購入したときの配当の標準偏差 = 35 万 3553 円 .

分散投資をすることによって, 配当の標準偏差が()することがわかった .

このことは, 分散投資によって()ことを意味する .

実際, 配当が期待値を下回るのは, A 社も B 社も業績が悪いときで, それが起こる確率は () である . 分散投資をしなければ, () の確率で配当が期待値を下回る .

投資先を 1 社, 2 社, 3 社, ... と, どんどん分散させていけばどうなるだろうか?
それは, 次の表のようにまとめられる .

1000 万円を投資する投資家の分散投資（配当に相関がないとき）

投資先（社）	配当の期待値（万円）	配当の標準偏差（万円）
1	50	50
2	50	$50 / \sqrt{2} = 25\sqrt{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	()	()

（ただし、投資家は各企業の株式を同数ずつ購入するものとする）

n 社の株式に投資を分散させると、配当の標準偏差は $50 / \sqrt{n}$ となるので、投資先をどんどん分散させていけば、配当の標準偏差は（ ）ことがわかる．

このことは、投資先をどんどん分散させていくことによって、（ ）ことを意味する．

【 配当に相関がないときの分散投資 】

投資先をどんどん分散させていくと、配当の標準偏差は（ ）に近づく．
すなわち、実際に受け取る配当は（ ）とほぼ等しくなる．

ドリル2

- 確率 $1/6$ で 1200 円，確率 $2/6$ で 600 円が得られる宝くじの賞金の標準偏差はいくらか．
- 次の状況のとき，A 社の配当と B 社の配当には，どのような相関が生まれるか．
A 社の業績のよし悪しと B 社の業績のよし悪しが独立しているとき
A 社の業績がよいとき，必ず B 社の業績が悪く，A 社の業績が悪いとき，必ず B 社の業績がよいとき
A 社の業績がよいとき，必ず B 社の業績もよく，A 社の業績が悪いとき，必ず B 社の業績も悪いとき
- 1 社の株式だけを購入するよりも，配当に相関がない複数の会社の株式を購入するほうが，配当の標準偏差は小さい．このことは，分散投資によって，どのような危険が軽減されることを意味するか．